Note allo svolgimento della traccia del 5 giugno 2025

Esercizio 2 (a)

Valgono le seguenti equivalenze, per ogni $h, k \in \mathbb{Z}$:

$8|2h(2h-1) \Longleftrightarrow 4|h(2h-1)$ perché $2h-1$ è dispari

$9|3k(3k-1) \Longleftrightarrow 3|k(3k-1) \Longleftrightarrow 3|k$ perché $3k-1$ non è divisibile per 3

Esercizio 3 (a)

La divisione euclidea richiesta prevede di determinare una rappresentazione della forma

$g(x) = f(x)q(x) + r(x),$ con $r(x) = 0$ oppure $r(x) \neq 0$ e $\deg r(x) < \deg f(x)$.

Si procede sottraendo successivamente da $g(x)$ multipli di $f(x)$ in modo da eliminare, ogni volta, il termine di grado massimo del polinomio differenza, fino a che il grado di quest'ultimo diventa minore del grado di $f(x)$. Allora si sarà trovato il resto. Nei primi due passi del procedimento sottostante i multipli di $f(x)$ utilizzati sono sue potenze opportunamente scelte.

$f(x) = x^{p^2} + x^p + x - \overline{1}$
$g(x) = x^{p^5} + x^{p^4} + x^{p^2} - \overline{1}$

$f(x)^{p^3} = x^{p^5} + x^{p^4} + x^{p^3} - \overline{1}$

$g(x) - f(x)^{p^3} = -x^{p^3} + x^{p^2}$ ha grado maggiore di $f(x)$

$g(x) - f(x)^{p^3} + f(x)^p = -x^{p^3} + x^{p^2} + x^{p^3} + x^{p^2} + x^p - \overline{1} = \overline{2}x^{p^2} + x^p - \overline{1}$ ha lo stesso grado di $f(x)$

$g(x) - f(x)^{p^3} + f(x)^p - \overline{2}f(x) = \overline{2}x^{p^2} + x^p - \overline{1} - \overline{2}x^{p^2} - \overline{2}x^p - \overline{2}x + \overline{2} = -x^p - \overline{2}x + \overline{1}$

ha grado minore di $f(x)$, dunque è il resto cercato.